Chapitre 13 : Dérivabilité

Table des matières

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Nombre dérivé et fonction dérivée

Définition 1.1 (dérivabilité, nombre dérivé, fonction dérivée)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial.

1. Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a lorsque la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

   Lorsque c'est le cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.

2. On dit que f est dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I.
   Dans ce cas, sa fonction dérivée est la fonction f' définie sur I par $x \mapsto f'(x)$.

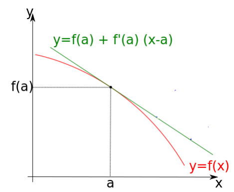
Remarque : De manière équivalente, f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie, et dans ce cas $f'(a)$ est égal à cette limite.

Notation : L'ensemble des fonctions définies et dérivables sur I, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est noté $\mathscr{D}(I\,;\mathbb{R})$.

Rappel :

Lorsqu'une fonction f à valeurs réelles est dérivable en a, sa courbe représentative admet une tangente en a qui a pour équation :

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$



Remarque : Dans le cas où $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \pm\infty$, la courbe représentative de f admet une tangente verticale en a, qui a pour équation $x = a$.
Exemples : la fonction racine carrée en 0, les fonctions Arccos et Arcsin en -1 et en 1.

Proposition 1.2 (caractérisation de la dérivabilité à l'aide d'un développement limité)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial.
La fonction f est dérivable en $a \in I$ si, et seulement si, il existe un réel l et une fonction ε tels que

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + l \times (x - a) + (x - a)\varepsilon(x - a) \text{ où } \varepsilon(x - a) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, dans ce cas, $f'(a) = l$.

Dérivabilité des fonctions usuelles :
Toutes les fonctions usuelles (polynomiales, puissances, exponentielles, logarithmes, circulaires et circulaires réciproques, hyperboliques) sont dérivables sur leurs ensembles de définition, excepté :

1. les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in]0\,;1[$, définies sur $\mathbb{R}_+$ mais dérivables seulement sur $\mathbb{R}_+^*$ (*exemple :* la fonction racine carrée, pour $\alpha = \frac{1}{2}$) ;
2. la fonction valeur absolue, définie sur $\mathbb{R}$ mais dérivable seulement sur $\mathbb{R}^*$;
3. les fonctions Arccos et Arcsin, définies sur $[-1\,;1]$ mais dérivables seulement sur $]-1\,;1[$;
4. la fonction partie entière, dérivable seulement sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Proposition 1.3 (la dérivabilité entraîne la continuité)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial.

1. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
2. Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Remarque : La réciproque est fausse. *Contre-exemple :* fonction valeur absolue en 0.

1.2 Méthode d'Euler

On considère une équation différentielle de la forme $y' = f(t,y)$ où l'inconnue y est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans J et $f : I \times J \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables. En rajoutant une condition initiale $y(t_0) = y_0$ avec $(t_0,y_0) \in I \times J$, on se trouve donc avec un problème de Cauchy. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que, sous certaines hypothèses concernant f, un problème de Cauchy a une unique solution. Cette solution existe en théorie ; malheureusement il n'est pas toujours possible d'en avoir une expression à l'aide d'une formule.

L'objectif de la méthode d'Euler est d'obtenir une approximation de la solution d'un problème de Cauchy.

Principe de la méthode d'Euler :
On cherche une approximation de la solution sur un intervalle $I = [t_0; t_0 + T]$.
On commence par discrétiser le problème en construisant une subdivision régulière de I :

- On fixe un entier $n \geqslant 1$ et on subdivise I par *pas* constant $h = \frac{T}{n}$ en posant $t_k = t_0 + kh$ pour $k \in [\![0; n]\!]$.
- Avec ces notations, on a
$$y(t_1) = y(t_0) + h\, y'(t_0) + h\varepsilon(h) \text{ où } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
- On réalise alors l'approximation suivante : $y(t_1) \approx y(t_0) + h\, f(t_0,y(t_0))$.
- On approche de même $y(t_2)$ par $y(t_2) \approx y(t_1) + h\, f(t_1,y(t_1))$.
- On répète l'opération pour approcher $y(t_3), \ldots ,y(t_n)$, ce qui revient à considérer la suite $(y_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$:
$$y_0 = y(t_0) \quad \text{ et } \forall k \in [\![0; n-1]\!] \quad y_{k+1} = y_k + h\, f(t_k,y_k)$$

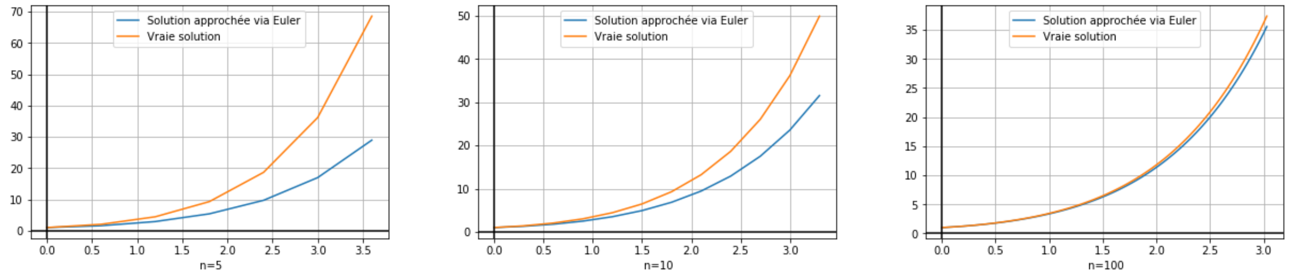
Efficacité et limite de la méthode :
Quand n est suffisamment grand, les nombres y_k approchent assez bien les valeurs de $y(t_k)$.
La méthode d'Euler dépend fortement du pas de temps choisi (nombre de subdivisions). Plus le pas de temps est petit, plus le nombre de points calculés est grand et plus le calcul sera précis au début, mais plus le temps de calcul sera long. Il faut donc trouver un compromis en fonction de la situation.

Méthode d'Euler sous Python :

```
def euler(f,t0,T,y0,n):
    h=T/n
    T=[t0]
    Y=[y0]
    t=t0
    while t<=T+t0:
        t=t+h
        Y.append(Y[-1]+h*f(Y[-1],T[-1]))
        T.append(t)
    return T,Y
```

Exemple 1.4 : Le problème de Cauchy suivant $\begin{cases} y' - y = t \\ y(0) = 1 \end{cases}$ admet pour unique solution $y : t \mapsto 2\mathbf{e}^t - t - 1$.

On peut utiliser la méthode d'Euler afin de déterminer une approximation de y (c.f. représentations graphiques ci-dessous). L'utilité de la méthode est ici limitée car on connaît une forme explicite de la solution (ce qui n'est pas toujours le cas).



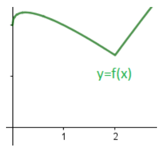
1.3 Dérivée à gauche et à droite

Définition 1.5 (dérivabilité et dérivée à gauche et à droite)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial, et soit $a \in I$.

1. On suppose que f est définie à droite de a, c'est-à-dire que $I \cap]a, +\infty[\neq \emptyset$.
   On dit que f est dérivable à droite en a si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.
   Lorsque c'est le cas, cette limite est appelée nombre dérivé à droite de f en a, noté $f'_d(a)$.
2. On suppose que f est définie à gauche de a, c'est-à-dire que $I \cap]-\infty, a[\neq \emptyset$.
   On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.
   Lorsque c'est le cas, cette limite est appelée nombre dérivé à gauche de f en a, noté $f'_g(a)$.

Représentation graphique : Graphiquement, les dérivées à gauche et à droite se matérialisent par des demi-tangentes.



Proposition 1.6 (caractérisation de la dérivée à l'aide des dérivées à gauche et à droite)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial, et soit a un point intérieur de I.
La fonction f est dérivable en a si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. f est dérivable à droite et à gauche en a ;
2. $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Dans ce cas, on a alors : $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

2 Opérations sur les dérivées

2.1 Combinaisons linéaires

Théorème 2.1 (dérivabilité et dérivée d'une combinaison linéaire)

Soit f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial, et soient α et $\beta \in \mathbb{R}$.

1. Soit $a \in I$. Si f et g sont dérivables en a, alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a, et on a l'égalité : $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$.
2. Si f et g sont dérivables sur I, alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I, et on a l'égalité : $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

2.2 Produit

Théorème 2.2 (dérivabilité et dérivée d'un produit)

Soit f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial.

1. Soit $a \in I$. Si f et g sont dérivables en a, alors la fonction fg est dérivable en a, et on a l'égalité : $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
2. Si f et g sont dérivables sur I, alors la fonction fg est dérivable sur I, et on a l'égalité : $(fg)' = f'g + fg'$.

2.3 Composition

Théorème 2.3 (dérivabilité et dérivée d'une fonction composée)

Soient des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$, avec I et J des intervalles non triviaux.
On suppose que $f(I) \subset J$, de telle sorte que la composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est bien définie.

1. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a, et on a l'égalité : $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.
2. Si f et g sont dérivables respectivement sur I et J, alors la composée $g \circ f$ est dérivable sur I, et on a l'égalité : $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

Remarque : Pour le second point, il suffit que g soit dérivable sur $f(I)$ plutôt que sur J.

2.4 Inverse et quotient

Théorème 2.4 (dérivabilité et dérivée d'un inverse)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, , avec I un intervalle non trivial.
On suppose que f ne s'annule pas, de telle sorte que la fonction $\frac{1}{f}$ est bien définie sur I.

1. Si f est dérivable en a, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable en a, et $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$.
2. Si f est dérivable sur I, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I, et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

Corollaire 2.5 (dérivabilité et dérivée d'un quotient)

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial.
On suppose que g ne s'annule pas, de telle sorte que la fonction $\frac{f}{g}$ est bien définie sur I.

1. Si f et g sont dérivables en a, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a, et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.
2. Si f et g sont dérivables sur I, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I, et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

2.5 Réciproque

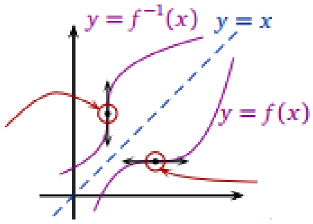
Théorème 2.6 (dérivabilité et dérivée d'une fonction réciproque)

Soit une fonction $f : I \to J$ bijective et dérivable, avec I et J des intervalles non triviaux.

1. Soit $a \in I$. Si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$, et on a l'égalité :
$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$$
2. La fonction f^{-1} est donc dérivable sur $\{x \in J \ / \ f'(f^{-1}(x)) \neq 0\}$, et pour un tel x, on a l'égalité :
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}\,.$$

En particulier si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et
$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

Représentation graphique : Avec ces notations, les tangentes à la courbe de f en a et à la courbe de f^{-1} en b dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. En particulier, on remarque la non dérivabilité de f^{-1} aux points où f' s'annule.



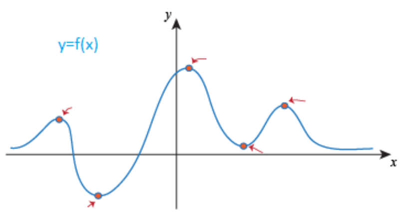
3 Théorèmes liés à la dérivation

3.1 Extremum local et point critique

Définition 3.1 (extremum local)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$, et soit $a \in I$.

1. On dit que f admet un maximum local en a lorsque la restriction de f à (au moins) un voisinage de a admet un maximum en a, c'est-à-dire lorsqu'il existe $\eta > 0$ tel que la restriction de f à $I \cap [a - \eta; a + \eta]$ admet un maximum en a.
2. On dit que f admet un minimum local en a lorsque la restriction de f à (au moins) un voisinage de a admet un minimum en a, c'est-à-dire lorsqu'il existe $\eta > 0$ tel que la restriction de f à $I \cap [a - \eta; a + \eta]$ admet un minimum en a.
3. On dit que f admet un extremum local en a lorsque f admet un maximum local ou un minimum local en a.



Définition 3.2 (point critique)

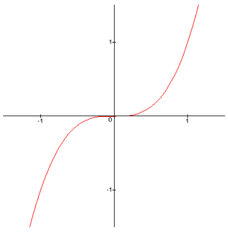
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, avec I un intervalle non trivial, et soit $a \in I$.
On dit que a est un point critique de f si $f'(a) = 0$.

Théorème 3.3 (condition nécessaire pour un extremum local)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable avec I un intervalle non trivial, et soit a un point intérieur de I.
Si f admet un extremum local en a alors a est un point critique de f (c'est-à-dire $f'(a) = 0$).

Remarque : Ce résultat permet de connaître les extrema locaux **possibles** en résolvant l'équation $f'(x) = 0$.
Il faut ensuite les étudier cas par cas, sans oublier d'étudier la fonction sur le bord du domaine de définition.

Attention : La réciproque est fausse.
La fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée s'annule en 0 sans que la fonction n'admette d'extremum local en 0.



3.2 Théorème de Rolle et égalité des accroissements finis

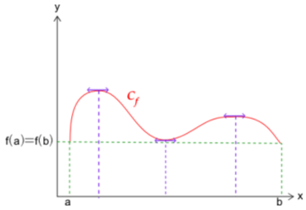
Théorème 3.4 (théorème de Rolle)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial, et soient a et $b \in I$ tels que $a < b$.
On suppose que :

1. f est continue sur $[a\,;b]$;
2. f est dérivable sur $]a\,;b[$;
3. $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique : Si $f(a) = f(b)$ alors il existe un point $c \in]a;b[$ pour lequel la tangente à la courbe de f est horizontale.



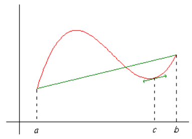
Corollaire 3.5 (égalité des accroissements finis)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial, et soient a et $b \in I$ tels que $a < b$.
On suppose que :

1. f est continue sur $[a\,;b]$;
2. f est dérivable sur $]a\,;b[$.

Alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Interprétation géométrique :
Il existe un point $c \in]a;b[$ pour lequel la tangente à la courbe de f est parallèle à la corde reliant $f(a)$ et $f(b)$.



Interprétation cinématique :
Lors d'un déplacement rectiligne, il existe un instant t en lequel la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne.

3.3 Monotonie des fonctions dérivables

Théorème 3.6 (caractérisation de la monotonie pour une fonction dérivable)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, avec I un **intervalle** non trivial.

1. f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.
2. f est décroissante si et seulement si $f' \leqslant 0$.
3. f est constante si et seulement si $f' = 0$.

Théorème 3.7 (caractérisation de la stricte monotonie pour une fonction dérivable)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, avec I un **intervalle** non trivial.

1. f est strictement croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$ et s'il n'existe aucun intervalle non trivial sur lequel f' est la fonction nulle.
2. f est strictement décroissante si et seulement si $f' \leqslant 0$ et s'il n'existe aucun intervalle non trivial sur lequel f' est la fonction nulle.

Cas particulier : Si $f' > 0$, alors f est strictement croissante et si $f' < 0$, alors f est strictement décroissante. En revanche, les réciproques sont fausses. *Contre-exemple :* $x \mapsto x^3$.

Remarque : Les deux théorèmes précédents restent valables si l'on suppose seulement que f est continue sur I et f est dérivable sur $\mathring{I}$ (intérieur de I). *Exemples :* fonctions racine carrée, Arccos, Arcsin.

3.4 Inégalité des accroissements finis

Définition 3.8 (fonction lipschitzienne)

Soit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, avec $D \subset \mathbb{R}$.

1. Soit $K \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est <u>K-lipschitzienne</u> si :
$$\forall (x,y) \in D^2, \quad |f(y) - f(x)| \leqslant K|y - x|.$$
2. On dit que f est <u>lipschitzienne</u> s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit K-lipschitzienne.

Proposition 3.9 (lipschitzienne entraîne continue)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial.
Si f est lipschitzienne, alors elle est continue.

Remarque : La réciproque est fausse.

Exemple 3.10 : Montrer que la fonction carré n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.11 (inégalité des accroissements finis)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, avec I un intervalle non trivial.
Si f' est bornée, alors f est lipschitzienne.
Plus précisément, supposons qu'il existe un réel positif K tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant K.$$

Alors f est K-lipschitzienne, c'est-à-dire : $\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(y) - f(x)| \leqslant K|y - x|.$

Cas particulier : Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ (avec $a < b$).
Alors la fonction $|f'|$ est continue sur le segment $[a\,;b]$ et à valeurs réelles, donc elle admet un maximum M_1.
D'après l'inégalité des accroissements finis, f est donc M_1-lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in [a\,;b]^2, \quad |f(y) - f(x)| \leqslant M_1 \times |y - x|.$$

Exemple 3.12 : Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ converge vers $\mathbf{e}$.

On pourra considérer $f_n : x \mapsto \mathbf{e}^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$ *où* $n \in \mathbb{N}^*$.

Application de l'inégalité des accroissements finis à l'étude de suites récurrentes :

Exemple 3.13 : Montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.

Méthode : Pour montrer que (u_n) converge vers un point fixe c de f (la fonction itératrice, ici $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$), chercher un intervalle stable par f, qui contient le point fixe c ainsi que tous les termes de la suite et sur lequel on a : $|f'| \leqslant K < 1$.

3.5 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 3.14 (théorème de la limite de la dérivée)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial, et soit $a \in I$.
On suppose que :

1. f est continue sur I ;
2. f est dérivable sur $I \backslash \{a\}$;
3. $f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell$ où $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell$. Par conséquent,

- si $\ell \in \{-\infty\,;+\infty\}$ alors f n'est pas dérivable en a, et sa courbe représentative présente une tangente verticale en a.
- Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$ (donc f' est continue en a).

Exemple 3.15 : Étudier la dérivabilité en 0 de $f : x \mapsto \sqrt{\mathbf{e}^x - 1}$ et $g : x \mapsto x\mathbf{e}^{\sqrt{x}}$.

Remarque : Attention, si f' n'admet pas de limite en a, on ne peut pas savoir si f est dérivable en a.

Exemple 3.16 : Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x\sin(\ln(|x|)) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Déterminer le comportement de f' au voisinage épointé de 0.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

4 Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

4.1 Définition

Définition 4.1 (fonction de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ lorsque f est n fois dérivable et que $f^{(n)}$ est continue.
2. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ lorsque f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques :

1. f de classe $\mathscr{C}^n \Leftrightarrow \forall k \in [\![0\,;n]\!]$, f de classe $\mathscr{C}^k$
2. f de classe $\mathscr{C}^\infty \Leftrightarrow f$ infiniment dérivable
3. Une fonction n fois dérivable n'est pas nécessairement de classe $\mathscr{C}^n$.

Exemple 4.2 : Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$. Montrer que f est dérivable mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Notations :

1. L'ensemble des fonctions définies et n fois dérivables sur I, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est noté $\mathscr{D}^n(I\,;\mathbb{R})$.
2. L'ensemble des fonctions définies et de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est noté $\mathscr{C}^n(I\,;\mathbb{R})$.
3. L'ensemble des fonctions définies et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est noté $\mathscr{C}^\infty(I\,;\mathbb{R})$.

Cas des fonctions usuelles :
Toutes les fonctions usuelles (polynomiales, puissances, exponentielles, logarithmes, circulaires et circulaires réciproques, hyperboliques) sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition, excepté :

1. les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N}$, définies sur $\mathbb{R}_+$ mais de classe $\mathscr{C}^\infty$ seulement sur $\mathbb{R}_+^*$
   (une telle fonction est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+$ pour $n = \lfloor \alpha \rfloor$, avec $f^{(n)}$ non dérivable en 0) ;
2. la fonction valeur absolue, définie sur $\mathbb{R}$ mais de classe $\mathscr{C}^\infty$ seulement sur $\mathbb{R}^*$;
3. les fonctions Arccos et Arcsin, définies sur $[-1\,;1]$ mais de classe $\mathscr{C}^\infty$ seulement sur $]-1\,;1[$;
4. la fonction partie entière, de classe $\mathscr{C}^\infty$ seulement sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

Exemple 4.3 : Déterminer les dérivées successives de la fonction cos.

4.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

4.2.1 Combinaison linéaire

Théorème 4.4 (combinaison linéaire de fonctions n fois dérivables / de classe $\mathscr{C}^n$ / $\mathscr{C}^\infty$)

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial, soient α et $\beta \in \mathbb{R}$, et soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est n fois dérivable sur I, et on a l'égalité : $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$.
2. Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
3. Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

4.2.2 Produit

Théorème 4.5 (produit de fonctions n fois dérivables / de classe $\mathscr{C}^n$ / $\mathscr{C}^\infty$)

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial, et soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors la fonction fg est n fois dérivable sur I, et on a l'égalité suivante, appelée <u>formule de Leibniz</u> : $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
2. Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors la fonction fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
3. Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, alors la fonction fg est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

4.2.3 Composition

Théorème 4.6 (composition de fonctions n fois dérivables / de classe $\mathscr{C}^n$ / $\mathscr{C}^\infty$)

Soient des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$, avec I et J des intervalles non triviaux, et soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que $f(I) \subset J$, de telle sorte que la composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est bien définie.

1. Si f et g sont n fois dérivables respectivement sur I et J, alors la composée $g \circ f$ est n fois dérivable sur I.
2. Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ respectivement sur I et J, alors la composée $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
3. Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ respectivement sur I et J, alors la composée $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

4.2.4 Inverse et quotient

Théorème 4.7 (inverse d'une fonction n fois dérivable / de classe $\mathscr{C}^n$ / $\mathscr{C}^\infty$)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial, et soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que f ne s'annule pas, de telle sorte que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est bien définie sur I.

1. Si f est n fois dérivable sur I, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est n fois dérivable sur I.
2. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
3. Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Corollaire 4.8 (quotient de fonctions n fois dérivables / de classe $\mathscr{C}^n$ / $\mathscr{C}^\infty$)

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial, et soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que g ne s'annule pas, de telle sorte que la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bien définie sur I.

1. Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable sur I.
2. Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
3. Si f sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

4.2.5 Réciproque

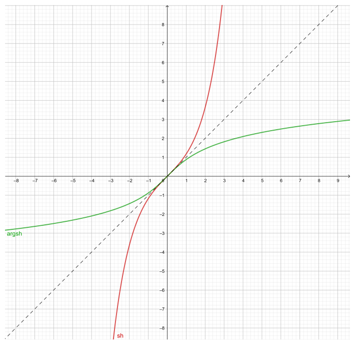
Théorème 4.9 (réciproque d'une fonction n fois dérivables / de classe $\mathscr{C}^n$ / $\mathscr{C}^\infty$)

Soit une fonction $f : I \to J$ bijective et dérivable, avec I et J des intervalles non triviaux, et soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que **la dérivée première f' ne s'annule pas** sur I.

1. Si f est n fois dérivable sur I, alors sa bijection réciproque f^{-1} est n fois dérivable sur J.
2. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors sa bijection réciproque f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.
3. Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, alors sa bijection réciproque f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J.

Exemple 4.10 :

1. Démontrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note Argsh sa réciproque.



2. Montrer que Argsh est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis expliciter Argsh$'$ et Argsh$''$.

5 Fonctions convexes

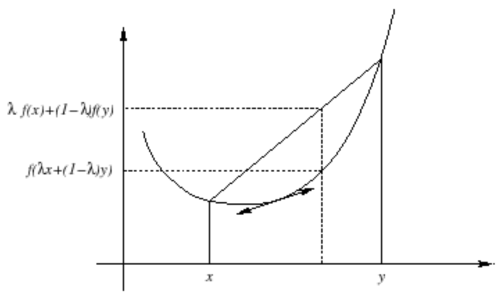
Définition 5.1 (fonction convexe, inégalité de convexité)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial. On dit que f est convexe lorsque

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0;1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Une telle inégalité s'appelle une inégalité de convexité.

Interprétation géométrique : La courbe représentative est située en-dessous de chacune de ses sécantes entre les deux points d'intersection.



Remarque : On dit qu'une fonction est concave lorsque son opposé est convexe. Il suffit d'étudier les fonctions convexes, les fonctions concaves présenteront des propriétés analogues (au sens des inégalités près). Par exemple, la courbe représentative est située en-dessus de chacune de ses sécantes entre les deux points d'intersection.

Vocabulaire : On dit qu'une fonction est convexe sur J (resp. concave sur J) lorsque sa restriction à l'intervalle J est convexe (resp. concave). Les points d'inflexion sont les éléments du domaine de définition où s'opère un changement de concavité.

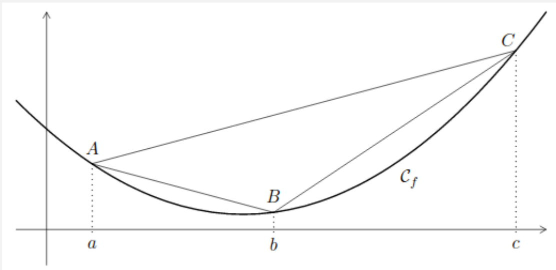
Exemples 5.2 :

- Les fonctions affines sont convexes et concaves.
- Les fonctions cos et sin ne sont ni convexes ni concaves.
- D'après l'inégalité triangulaire, la fonction valeur absolue est convexe.

Lemme 5.3 (inégalités des pentes)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle non trivial.
Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La fonction f est convexe.
2. Pour tout $(a,b,c) \in I^3$ tel que $a < b < c$,
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$
3. Pour tout $(a,b,c) \in I^3$ tel que $a < b < c$,
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$



Proposition 5.4 (caractérisation de la convexité à l'aide de la dérivée)

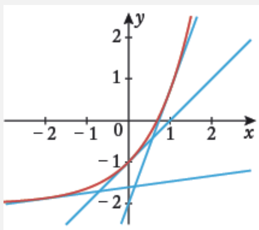
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, avec I un intervalle non trivial.
La fonction f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Proposition 5.5 (position du graphe et des tangentes)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable, avec I un intervalle non trivial. Soit $a \in I$.

Alors
$$\forall x \in I, \quad f(a) + f'(a)(x-a) \leqslant f(x).$$

Autrement dit, le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.



Exemple 5.6 : Montrer que la fonction exp est convexe, puis en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant x+1$.

Proposition 5.7 (caractérisation de la convexité à l'aide de la dérivée seconde)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, avec I un intervalle non trivial.
La fonction f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$.

Remarque : Cette dernière caractérisation est celle qui est le plus utilisée en pratique.

Exemple 5.8 : Montrer que Argsh admet un unique point d'inflexion.

Exemple 5.9 : Montrer que :
$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

6 Extension des notions aux fonctions complexes

On peut étendre la plupart des résultats vus dans les parties précédentes pour des fonctions à valeurs complexes.

Définition 6.1 (dérivabilité, nombre dérivé, fonction dérivée)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{C}$, avec I un intervalle non trivial.

1. Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a lorsque la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

   Lorsque c'est le cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.
2. On dit que f est dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I.
   Dans ce cas, sa fonction dérivée est la fonction f' définie sur I par $x \mapsto f'(x)$.

Théorème 6.2 (caractérisation à l'aide de la partie réelle et imaginaire)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{C}$, avec I un intervalle non trivial.

1. Soit $a \in I$. La fonction complexe f est dérivable en a si et seulement si les fonctions réelles $\mathfrak{Re} f$ et $\mathfrak{Im} f$ sont dérivables en a. Lorsque c'est le cas, on a alors l'égalité :

$$f'(a) = (\mathfrak{Re} f)'(a) + \mathrm{i}(\mathfrak{Im} f)'(a)$$

2. La fonction complexe f est dérivable sur I si et seulement si les fonctions $\mathfrak{Re} f$ et $\mathfrak{Im} f$ sont dérivables sur I. Lorsque c'est le cas, on a alors l'égalité :

$$f' = (\mathfrak{Re} f)' + \mathrm{i}(\mathfrak{Im} f)'$$

Remarque : De manière plus générale, pour une fonction f à valeurs complexes, on a les équivalences suivantes :

- f est n fois dérivable $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{Re} f$ et $\mathfrak{Im} f$ sont n fois dérivables
- f est de classe $\mathscr{C}^n$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{Re} f$ et $\mathfrak{Im} f$ sont de classe $\mathscr{C}^n$
- f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{Re} f$ et $\mathfrak{Im} f$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$

Lorsque c'est le cas, on a alors $\mathfrak{Re}(f^{(n)}) = (\mathfrak{Re} f)^{(n)}$ et $\mathfrak{Im}(f^{(n)}) = (\mathfrak{Im} f)^{(n)}$.

Notations :

1. L'ensemble des fonctions définies et n fois dérivables sur I, et à valeurs dans $\mathbb{C}$, est noté $\mathscr{D}^n(I\,;\mathbb{C})$.
2. L'ensemble des fonctions définies et de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et à valeurs dans $\mathbb{C}$, est noté $\mathscr{C}^n(I\,;\mathbb{C})$.
3. L'ensemble des fonctions définies et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, et à valeurs dans $\mathbb{C}$, est noté $\mathscr{C}^\infty(I\,;\mathbb{C})$.

Ce qui est encore valable pour les fonctions à valeurs complexes

- On peut toujours parler de dérivabilité à gauche et à droite.
- On a toujours stabilité par addition, multiplication et quotient de la dérivabilité.
- On a toujours stabilité de la dérivabilité par composition $g \circ f$ avec $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ (avec I et J des intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$).
- Une fonction constante a une dérivée nulle (mais plus rien sur la monotonie).
- Théorème de la limite de la dérivée dans le cas où la limite de la dérivée est complexe.
- **L'inégalité des accroissements finis est encore vraie pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.** Cette dernière résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans le chapitre « Intégration ».

Ce qui n'est plus valable

- La notion d'extremum, de monotonie et de convexité n'ont pas lieu d'être pour une fonction à valeurs complexes.
- Le théorème de Rolle et des accroissements finis sont faux pour une fonction à valeurs complexes.
  Contre-exemple : la fonction $f : x \mapsto \mathbf{e}^{\mathbf{i}x}$ entre 0 et 2π.
- Nous n'avons pas étudié de manière générale les fonctions dont le domaine de définition est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. On ne peut donc pas considérer la bijection réciproque f^{-1} et la composée $g \circ f$ si $f : I \to \mathbb{C}$. Néanmoins, on peut considérer le cas particulier où g est l'exponentielle complexe (c.f. théorème suivant).

Théorème 6.3 (dérivabilité et dérivée d'une fonction composée par l'exponentielle)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{C}$, avec I un intervalle non trivial. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors la fonction $\exp \circ f$ est dérivable en a, et on a l'égalité : $(\exp \circ f)'(a) = f'(a)\,\mathbf{e}^{f(a)}$.
2. Si f est dérivable sur I, alors la composée $\exp \circ f$ est dérivable sur I, et on a l'égalité : $(\exp \circ f)' = f' \times (\exp \circ f)$.
3. Si f est n fois dérivable sur I, alors la composée $\exp \circ f$ est n fois dérivable sur I.
4. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors la composée $\exp \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
5. Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, alors la composée $\exp \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.